Modélisation et représentation graphique

Exercice 1. (IREM d'Aix-Marseille)

Dessiner les graphes suivants :

— Les sommets sont les faces d'un cube, deux sommets sont reliés si les faces correspondantes ont une arête du cube en commun.

— Les sommets du graphe sont tous les sous ensembles à deux éléments de 1, 2, 3, 4 deux sommets sont reliés si leur intersection est non vide.

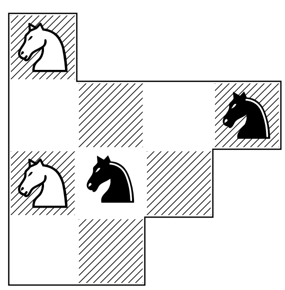
— Graphe associé à la situation : Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions qui ne se connaissent pas, chaque espion doit entrer en contact avec tous les espions des autres pays.

Exercice 2. Quel est le nombre de graphes à n sommets et m arêtes ? (sans tenir compte des isomorphismes)

Exercice 3. Dessiner tous les graphes à 3 et 4 sommets, à isomorphisme près (c'ets à dire que si deux graphes sont isomorphes il ne faut en dessiner qu'un seul).

Exercice 4. **Échange de cavaliers** (Jean-Paul Davalan)

Pour résoudre ce casse-tête vous devez échanger les positions des deux cavaliers blancs avec celles des deux noirs, en respectant évidemment les règles du déplacement du cavalier sur un échiquier et en n'utilisant que les dix cases dessinées.



Question 1. Modéliser le problème à l'aide d'un graphe.

Question 2. Utiliser cette modélisation pour résoudre ce casse-tête.

Question 3. Y-a-t-il des cases inutiles ?

Exercice 5. Dans un groupe de vingt enfants, est-il possible que sept d'entre eux aient chacun exactement trois amis, neuf d'entre eux en aient exactement quatre, et quatre d'entre eux exactement cinq ?

Exercice 6. Montrer que si on prend 6 étudiants de l'UFR alors, il y a toujours 3 personnes qui ne se connaissent pas mutuellement ou il y a 3 personnes qui se connaissent mutuellement. Donner un exemple avec 5 étudiants ou cela n'est pas vrai.

Exercice 7. On dit que séquence de nombres entiers est *réalisable* s'il existe un graphe dont les sommets ont exactement les degrés de la séquence.

Question 1. Pour chaque séquence qui suit, dites si la séquence est réalisable ou non. Si la réponse est oui, dessinez un tel graphe et dire s'il est unique (à isomorphisme près), sinon justifiez pourquoi il n'y a pas de tel graphe.

a. $(1;2;2;4;5;5)$
b. $(2;2;2;2;2;2)$
c. $(1;1;1;1;1;1)$
d. $(3;3;3;3;3;5)$
e. $(2;2;2;3;3;3)$
f. $(0;2;2;3;4;5)$
g. $(5;5;5;5;2;2)$

Question 2. Donnez des conditions nécessaires pour qu'une séquence soit réalisable. Sont-elles suffisantes ?

Exercice 8. Jeux de mains

Le tout-Grenoble se retrouve lors du vernissage d'une exposition dans une galerie d'art contemporain locale. Certaines des personnes présentes au vernissage se connaissent, d'autres pas. La plus élémentaire des politesses veut que les personnes qui se connaissent se serrent la main. Deux personnes ne se connaissant pas ne se serrent pas la main.

Question 1. Démontrer qu'il existe au moins deux personnes qui ont serré le même nombre de mains.

Exercice 9. Dessinez un graphe 3-regulier qui ne soit pas le graphe complet K_4.

Exercice 10. Le conseil municipal d'une ville comprend 7 commissions, qui obéissent aux règles suivantes :

— Règle 1 : tout conseiller municipal fait partie de 2 commissions exactement ;
— Règle 2 : deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en commun.

Combien y'a t-il de membres dans le conseil municipal ?

Exercice 11. Le professeur McBrain

Le professeur McBrain et son épouse Muriel donnent une surprise-partie à laquelle ils invitent 4 autres couples mariés. À l'arrivée, certaines paires de personnes se sont serrées la main (bien sûr, aucun couple marié ne se serre la main). À la fin de la soirée, le professeur demande à chacune des 9 personnes, à combien de personnes elles ont serré la main au début de la soirée et il obtient 9 réponses différentes.

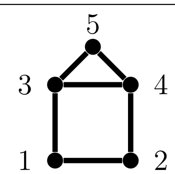
Question 1. À combien de personnes Muriel a-t-elle serré la main ?

Représentation matricielle et par liste des graphes

Exercice 12. Dessiner les graphes $G = (V, E)$ suivants :

1. $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $E = \{(u, v), u + v$ est pair $\}$.
2. $V =$ l'ensemble des sous ensembles de $\{1, 2, 3\}$ et $E = \{(U, V), U \subset V$ ou $V \subset U$ $\}$.

Exercice 13. Complétez le tableau suivant :

Definition ensembliste	Représentation graphique	Matrice adjacence	Matrice d'incidence	Liste d'adjacence
				
$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $E = \{12, 45, 34, 14, 35\}$				
		$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$		
			$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	
				— 1 : $[2, 3, 5]$ — 2 : $[1, 4]$ — 3 : $[1, 5]$ — 4 : $[2, 5]$ — 5 : $[1, 3, 4]$

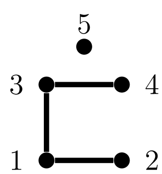
Exercice 14. Dans chacun des exemples suivants, dites si la matrice utilisée peut être une matrice d'adjacence, d'incidence ou ne pas représenter un graphe. Dans les deux premiers cas, dessinez un graphe correspondant, dans le dernier cas, justifiez pourquoi.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 15. Chaque colonne du tableau suivant représente un graphe différent, avec une représentation différente.

Dans chaque cas, on demande de répondre aux questions suivantes (sans passer par une autre représentation).

1. Quelle représentation du graphe a-t-on ?
2. Quels sont les voisins du sommet 1 ?
3. Quel est le nombre de voisins du sommet 4 ?
4. Est-ce que 5 est un sommet isolé ?
5. Combien y-a-t-il d'arêtes dans le graphe ?
6. Est-ce que les sommets 3 et 4 sont adjacents ?

		$V = \{1,2,3,4,5\}$ $E = \{12, 34, 15\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	— 1 : $[2,3,4]$ — 2 : $[1,3,4]$ — 3 : $[1,2,4]$ — 4 : $[1,2,3]$ — 5 : $[]$
1					
2					
3					
4					
5					
6					