Méthodes des Différences Finies
ISIMA – F4 2ème année

Jonas Koko

ISIMA

Plan

Equations différentielles ordinaires (EDO)

Problème modèle

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y(t),t), \quad t>0 \\ y(0) &= y_0 \quad \text{(condition initiale)} \end{aligned}$$

Si dérivée d'ordre supérieur : Changement de variable
Exemple :

$$y'' - y' = f$$

Poser $z = y'$

$$\begin{aligned} z' &= f + z \\ y' &= z \end{aligned}$$

EDO

Domaines d'applications :

- Thermodynamique (e.g, transfert de chaleur)
- Dynamique des populations (e.g., systèmes proie-prédateurs)
- Circuit électrique (e.g., calcul du potentiel électrique)
- Systèmes mécaniques (e.g., oscillation d'un ressort)

TP du cours en MATLAB

Equations aux dérivées partielles (EDP)

Problème en espace :

$$\begin{aligned}\alpha u(\boldsymbol{x}) - \nu \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}^2 u(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{x}) \text{ dans } \Omega \\ u(\boldsymbol{x}) &= 0 \text{ au bord (condition aux limites)}\end{aligned}$$

Prolème en espace-temps :

$$\begin{aligned}\partial_t u(\boldsymbol{x}, t) - \nu \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}^2 u(\boldsymbol{x}, t) &= f(\boldsymbol{x}, t) \text{ dans } \Omega \\ u(\boldsymbol{x}, t) &= 0 \quad \text{au bord} \\ u(\boldsymbol{x}, 0) &= u_0(\boldsymbol{x}) \quad \text{(condition initiale)}\end{aligned}$$

EDP

Domaines d'applications :

- Equation de la chaleur
- Vibrations/Ondes
- Systèmes mécaniques
- Dynamique des fluides

TP du cours en C

EDO (Problème de Cauchy)

$I = [0, \ T] \in \mathbb{R}$, $f \ : \ \mathbb{R}^m \times I \to \mathbb{R}^m$ continue

EDO

Trouver $y \ : \ I \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y(t), t) \quad \forall t \in I \\ y(0) &= y_0 \quad \text{condition initiale} \end{aligned}$$

$y_0 \in \mathbb{R}^m$ donné.

Existence de solution

Théorème (Existence et unicité)

Si f est lipschitzienne en y, i.e. $\exists L > 0$

$$|f(y,t) - f(x,t)| \leq L|x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m, \ \forall t > 0$$

alors le problème EDO admet une solution unique.

Exemple (f linéeaire)

Si f est de la forme

$$f(y(t),t) = Ay(t)$$

où A est une matrice $m \times m$. Alors

$$|f(y(t),t) - f(x(t),t)| \leq \| A \| \, |x(t) - y(t)|$$

Donc $L = \| A \|$.

Discrétisation

Théorème

f de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ continue et dérivable. Alors il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

Subdivision uniforme de $I=[0,\ T]$ de taille $h=T/N$

$$t_n=nh,\quad y^n=y(t_n),\quad n=0,1,2,\ldots,N$$

Théorème des accroissements finis dans $[t_n,\ t_{n+1}]$

$$y^{n+1}-y^n=hy'(\bar{t}_n),\quad \bar{t}_n\in]t_n,\ t_{n+1}[.$$

Méthodes d'Euler

$\bar{t}_n = t_n$: Euler explicite

$$\begin{aligned} y^0 &= y_0 \\ y^{n+1} &= y^n + hf(y^n, t_n), \quad n = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

$\bar{t}_n = t_{n+1}$: Euler implicite

$$\begin{aligned} y^0 &= y_0 \\ y^{n+1} - hf(y^{n+1}, t_{n+1}) &= y^n, \quad n = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Exemples

Système différentiel linéaire : A matrice $m \times m$.

$$\begin{aligned} y'(t) &= Ay(t), \quad t \geq 0 \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

Euler explicite :

$$\begin{aligned} y^0 &= y_0 \\ y^{n+1} &= y^n + hAy^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Euler implicite :

$$\begin{aligned} y^0 &= y_0 \\ (\mathbb{I}_m - hA)y^{n+1} &= y^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Convergence

Erreur de consistance

$$e_h(y) = \frac{1}{h}(y(t_{n+1}) - y(t_n)) - f(y(t_n), t_n)$$

Schéma consistant si

$$\lim_{h \to 0} \| e_h(y) \| = 0.$$

$$\pi_h(y) = (y(t_1), \dots, y(t_N)) \in \mathbb{R}^N$$

$\pi_h(y)$ projection de la solution exacte sur les points de la subdivision.

Erreur de convergence

$$\varepsilon_h(y) = y - \pi_h(y)$$

Schéma convergent si

$$\lim_{h \to 0} \| \varepsilon_h(y) \| = 0.$$

Convergence

Euler $\equiv$ Méthodes d'ordre 1

Il existe $C > 0$

$$\max_n |y^n - y(t_n)| \leq Ch$$

Stabilité

Euler explicite : conditionnellement stable

Euler implicite : inconditionnellement stable

Crank-Nicholson

$$\bar{t}_n = (t_n + t_{n+1})/2$$
$$f(y(\bar{t}_n), \bar{t}_n) = (f(y(t_n), t_n) + f(y(t_{n+1}), t_{n+1}))$$

Crank-Nicholson

$$y^0 = y_0$$
$$y^{n+1} - \frac{h}{2} f(y^{n+1}, t_{n+1}) = y^n + \frac{h}{2} f(y(t_n), t_n), \quad n = 0, 1, \ldots, N.$$

Crank-Nicholson $\equiv$ méthode d'ordre 2

Il existe $C > 0$

$$\max_n |y^n - y(t_n)| \leq Ch^2$$

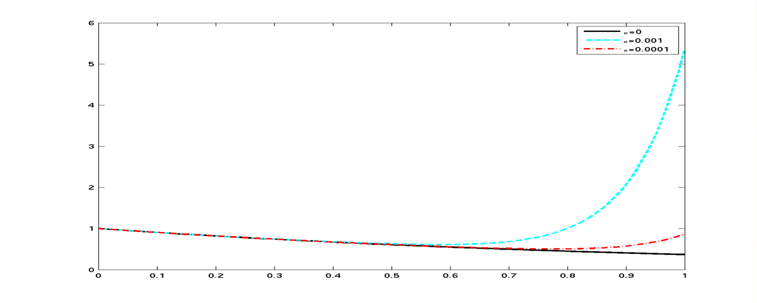
Exemple EDO instable

$$y'' - 10y' - 11y = 0,$$
$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Solution exacte : $y(t) = \mathrm{e}^{-t}$.

Conditions initiales perturbées : $y(0) = 1 + \varepsilon$, $y'(0) = 1$

Solution perturbée : $y_\varepsilon(t) = (1 + \dfrac{11}{12}\varepsilon)\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{\varepsilon}{12}\mathrm{e}^{11t}$

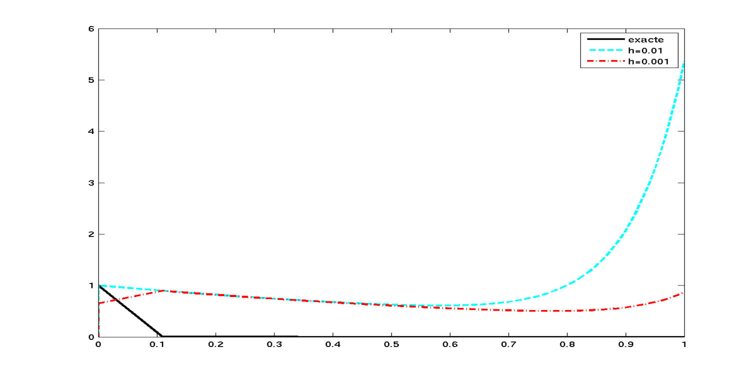


EDO raide

$$y' + 100y = 100, \quad y(0) = y_0.$$

Solution exacte $y(t) = (y_0 - 1)\mathrm{e}^{-100t} + 1.$

Euler explicite : $y^{n+1} = (1 - 100h)y^n + 100h = (y_0 - 1)(1 - 100h)^n + 1$



Problème elliptique 1D

EDP 1D

Trouver $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ solution de

$$-u''(x) + \alpha(x)u(x) = f(x) \;\; \text{dans } [a,\; b],$$
$$u(a) = u_a, \;\; u(b) = u_b,$$

- $\alpha \geq 0$ et f données du problème.
- $u(a) = u_a, \;\; u(b) = u_b$ conditions aux limites.

Origine de (1) : Dschéma d'Euler implicite du problème

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = f(x, t)$$

Discrétisation

$h = (b-a)/(N+1)$, $x_i = ih$
$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N+1} = b.$

Développement de Taylor :

$$\begin{aligned} u(x+h) &= u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x+\theta h), \\ u(x-h) &= u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x-\theta h), \end{aligned}$$

Approximation de la dérivée seconde

$$u''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)\right)$$

Système algébrique

Dans le problème : $u_i = u(x_i)$, $\alpha_i = \alpha(x_i)$, $f_i = f(x_i)$

$$\frac{1}{h^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) + \alpha_i u_i = f_i, \quad i = 1, \ldots, N.$$

On obtient les matrices

$$M = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$$

$$R = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b_h = \begin{pmatrix} f(x_1) + u_a/h^2 \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) + u_b/h^2 \end{pmatrix}$$

Système algébrique

$u_h = (u_1, \ldots, u_N)$ solution de

$$(M + R)u_h = b_h$$

Théorème

La matrice R est définie positive

Erreurs

$\pi_h(u) = (u(x_1), \ldots, u(x_N))$ projection de la solution exacte.

$$\varepsilon_h(u) = (M+R)\pi_h(u) - b_h \quad \text{erreur de consistance}$$
$$e_h(u) = u_h - \pi_h(u) \quad \text{erreur de convergence}$$

Théorème

Si u de classe $\mathcal{C}^4$

$$\| \varepsilon_h(u) \|_\infty \leq C\frac{h^2}{12}$$
$$\| e_h(u) \|_\infty \leq C\frac{h^2}{96}.$$

Problème modèle

Domaine $\Omega = (a_x,\ b_x) \times (a_y,\ b_y)$ de bord Γ

Trouver $u\ :\ \Omega \to \mathbb{R}$ solution de

$$\alpha(x)u(x) - \nu\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial y^2}\right) = f(x) \ \text{ dans } \Omega,$$

$$u = g \ \text{ sur } \Gamma$$

avec

- $\alpha(x) \geq 0$
- $\nu > 0$

Différences finies

M et N entiers naturels

$$h_x = (b_x - a_x)/(M+1) \qquad h_y = (b_y - a_y)/(N+1)$$

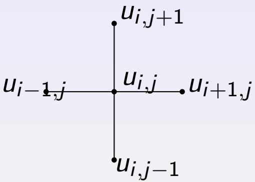
telles que

$$a_x = x_0 < x_1 < \cdots < x_i = ih_x < \cdots < x_M < x_{M+1} = b_x,$$
$$a_y = y_0 < y_1 < \cdots < y_j = jh_y < \cdots < y_N < y_{N+1} = b_y$$

On note

- $x_{ij} = (x_i, y_j)$ les points de la grille
- $u_{ij} = u(x_i, y_j)$ la fonction inconnue sur la grille

Approximation



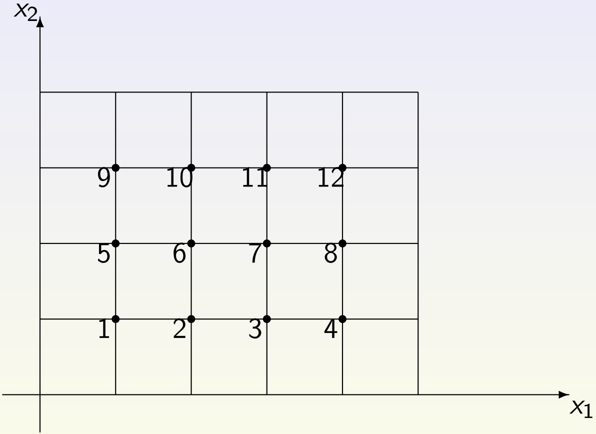
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{h_x^2}(u(x+h_x,y) - 2u(x,y) + u(x-h_x,y)) \\
\frac{\partial^2 u(x)}{\partial y^2} &\approx \frac{1}{h_y^2}(u(x,y+h_y) - 2u(x,y) + u(x,y-h_y)).
\end{aligned}
$$

$$
-\frac{\nu}{h_x^2}\left[u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}\right] - \frac{\nu}{h_y^2}\left[u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}\right] + \alpha_{i,j}u_{i,j} = f_{i,j},
$$

pour $1 \leq i \leq M$ et $1 \leq j \leq N$.

Approximations II

Conditions aux limites : $u_{i,j} = g_{i,j}, \quad i = 0, M+1$ ou $j = 0, N+1$



$$u = [(u_{1,1}, u_{2,1}, \ldots, u_{M,1})(u_{1,2}, u_{2,2}, \ldots, u_{M,2}) \cdots (u_{1,N}, u_{2,N}, \ldots, u_{M,N})]$$

Matrices

Système final : $Au = b$

$$A = \mathrm{diag}(\alpha_{ij}) + \begin{bmatrix} D & -F & & & \\ -F & D & -F & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -F & D & -F \\ & & & -F & D \end{bmatrix}$$

où $F = \frac{\nu}{h_y^2}\mathbb{I}_M$,

$$D = \begin{bmatrix} \beta & -\gamma & & & \\ -\gamma & \beta & -\gamma & & \\ & \ddots & \ddots & \gamma & \\ & & -\gamma & \beta & -\gamma \\ & & & -\gamma & \beta \end{bmatrix} \quad \text{avec } \beta = \frac{2\nu}{h_x^2} + \frac{2\nu}{h_y^2} \quad \text{et } \gamma = \frac{\nu}{h_x^2}$$

Second membre

$$
\begin{aligned}
b_{i+(j-1)M} &= f_{i,j}, \quad 1 < i < M,\ 1 < j < N \\
b_{i+(j-1)M} &= f_{i,j} + \nu \tilde{g}_{i,j}, \quad i = 0, M+1 \text{ ou } j = 0, N+1.
\end{aligned}
$$

avec

$$\tilde{g}_{1,1} = \frac{1}{h_x^2} g_{0,1} + \frac{1}{h_y^2} g_{1,0}, \quad \tilde{g}_{1,N} = \frac{1}{h_x^2} g_{0,N} + \frac{1}{h_y^2} g_{1,N+1}$$

$$\tilde{g}_{i,1} = \frac{1}{h_y^2} g_{i,0}, \quad \tilde{g}_{i,N} = \frac{1}{h_y^2} g_{i,N+1}, \quad 2 \leq i \leq M-1,$$

$$\tilde{g}_{M,1} = \frac{1}{h_x^2} g_{M+1,1} + \frac{1}{h_y^2} g_{M,0}, \quad \tilde{g}_{M,N} = \frac{1}{h_x^2} g_{M+1,N} + \frac{1}{h_y^2} g_{M,N+1},$$

$$\tilde{g}_{1,j} = \frac{1}{h_x^2} g_{0,j}, \quad \tilde{g}_{M,j} = \frac{1}{h_x^2} g_{M+1,j}, \quad 2 \leq j \leq N-1.$$

Exemple

Dans $\Omega = (0,\ 1)^2$: $\alpha = 0$, $\nu = 1$, $g = 0$
$M = N = 4$

$$u = [(u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1})(u_{1,2}, u_{2,2}, u_{3,2})(u_{1,3}, u_{2,3}, u_{3,3})]$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Problème non linéaire

Trouver $u : \Omega = (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R}$ solution de :

$$
\begin{aligned}
&-\Delta u(x) + u^3(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega, \\
&u(x) = 0, \quad \forall x \in \Gamma.
\end{aligned}
$$

Méthode de Newton $u^k \to u^{k+1} = u^k + w^k$
Dans l'équation :

$$-\Delta(u^k + w^k) + (u^k + w^k)^3 = f(x),$$

Approximation d'ordre 1 :

$$-\Delta w^k + 3(u^k)^2 w^k = f(x) + \Delta u^k - u^k$$

Problème non linéaire : Méthode de Newton

$k = 0$ u^0 donné, $\varepsilon > 0$ fixé

$k \geq 0$ Tant que $\| w^k \| > \varepsilon \| u^k \|$

1. Calculer w^k solution de

$$-\Delta w^k + 3(u^k)^2 w^k = f(x) + \Delta u^k - u^k$$

2. $u^{k+1} = u^k + w^k$

Remarques :

1. $\Delta u^k - u^k = (R - \mathbb{I})u^k$, R matrice du laplacien
2. $-\Delta w^k + 3(u^k)^2 w^k = (R + \mathrm{diag}(3(u_{ij}^k)^2))w^k$